

Signal Analysis with the Wigner Distribution

- Fourier transform은 신호에서 정보를 추출하기 위한 방법 중 가장 폭넓게 사용되는 방법
- Fourier transform의 경우 주파수 영역의 해석이기 때문에 non-stationary(비정상 신호)¹⁾ 분석에 있어 시간 정보 표현 불가
- non-stationary 신호 분석을 위한 신호 처리 방법 요구
 - TFR(time-frequency representation)의 측정 요구
- non-stationary 분석을 위한 방법들
 - ① Instantaneous frequency: 시간에 따라 주파수가 변하는 신호 분석에 유용
 - ② STFT:
 - non-stationary를 분석하는 전통적인 방법
 - 시간과 주파수 해상도가 반비례하는 문제점 존재
 - ③ Spectrogram: 시간과 주파수 해상도가 반비례하는 문제점 존재
 - ④ Wavelet transform:
 - non-stationary 분석에 가장 널리 사용되는 방법의 하나
 - wavelet이라는 기본 함수 사용하는 처리 기법
 - dilation이라는 변수에 비례해 시간 축을 따라 인장
 - 저주파 즉 큰 dilation에서는 큰 윈도우 함수로 인해 시간과 주파수의 해상도 반비례
 - ⑤ Wigner-Ville distribution:
 - non-stationary 분석에 가장 널리 사용되는 방법의 하나
 - 1932년 E. Wigner에 의해 제창된 일종의 변환 함수
 - 양자물리학에서 발생한 문제 해결을 위해 처음 적용
 - 음향적 응용에서 WD의 목적은 초당 소리 분석이 아닌 시스템 분석
즉 WD입력은 반드시 사운드가 아닌 스피커, transducer, 혹은 소리 회로의 대응 값 등
 - 한 시스템의 time vs frequency 분포를 특징지음
 - 이론적 관점에서 sonogram같은 Fourier를 기초로 한 방법과 직접 연관
 - 주파수 성분의 시간적 변화 검토에 유용

Interpreting Wigner Distribution Plots

- Input: impulse response²⁾ 혹은 측정된 시스템의 amplitude vs frequency response³⁾
- Output: frequency vs time
- 시간과 주파수가 지속적으로 변하는 경우, 신호 $x(t)$ 를 위한 Wigner-Ville distribution은 다음과 같이 정의

$$W_x(t, f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau/2)x^*(t-\tau/2) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau$$

1) A stationary signal is a signal that repeats into infinity with the same periodicity.

http://www.bearcave.com/misl/misl_tech/signal/nonstat/index.html

2) In signal processing, the impulse response, or impulse response function (IRF), of a dynamic system is its output when presented with a brief input signal, called an impulse. More generally, an impulse response refers to the reaction of any dynamic system in response to some external change.

http://en.wikipedia.org/wiki/Impulse_response

3) amplitude-verse-frequency response. Frequency response is a straight line which indicates a linear or flat amplitude across the frequency spectrum. This means that any frequency within the range of audio device is passed without boost or attenuation. the computer music tutorial, Curtis Road, p186

- WD plot을 통해 group delay⁴⁾, Instantaneous frequency(순시주파수)⁵⁾와 Instantaneous power(순시전력)⁶⁾, transient distortion⁷⁾, 스펙트럼 같은 기계적 측정 추출 가능
- WD plot은 2차원 혹은 3차원으로 나타남

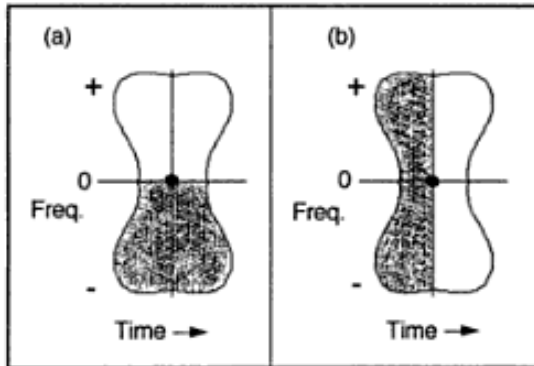


Figure 13.28 Interpreting Wigner distribution plots

- 2차원 plot에서 주어진 frequency 가로 부분(slice) 아래 영역은 frequency response 값
- 가로 부분 gravity의 중앙(그림 13.28a에 검은 점)은 그 주파수의 group delay time
- 세로 부분 영역은 그 시간에 신호가 갖는 envelope의 instantaneous power(그림 13.28b)
- slice의 gravity center가 instantaneous frequency와 동일
- 이 경우 plot은 x와 y에서 대칭
- 실제 신호에서는 신호가 변함에 따라 변화
- instantaneous power와 instantaneous frequency가 실시간 만들어질 때 amplitude modulation과 frequency modulation 효과 나타날 수 있음
- Janse와 Kaizer의 WD를 해석하기 위한 3차원의 plot과 guide line 제시
- 특히 그들은 이상적 system과 스피커 같은 실제 사용 장치 비교

Limits of the Wigner Distribution

- 실제 WD는 샘플 되고 윈도우 된 데이터에 근거. 일명 pseudo-Wigner distribution
- 다른 분석 기법과 마찬가지로 sampling과 windowing에 의해 distortion 발생.
하지만 이 과정에서 생긴 distortion은 비교적 경미
- WD에서 발생하는 주된 문제는 그것이 nonlinear하다는 것
즉 두 신호의 총합의 WD는 각 WD의 합이 아님
예) WD를 통과한 100Hz의 사인파 한 개는 개별 frequency 요소로 나타남
하지만 100Hz와 300Hz 두 사인파의 합을 WD에 통과시킬 경우 세 번째 요소인 200Hz (두 주파수의 차)를 볼 수 있음.
→ 이 clutter는 입력에 존재하지 않던 주파수.
clutter는 음악 신호분석을 위한 WD의 시각적 검사의 문제점 보여줌
- 소리에 대한 인간의 인식과 WD의 연관성에 제한 존재

4) 주파수의 변화에 따라 비선형적인 위상응답을 나타내는 현상.
비디오 대역폭 내에서 비선형적인 위상·주파수 응답 특성 때문에 발생하는 것. 주로 3.58MHz 근처 또는 그 이상의 주파수에서 위상의 비선형적 이동현상으로 나타남

5) 신호의 매 순간에서의 주된 주파수 성분

6) 전압과 전류의 시간함수를 곱한 것. 시시각각 전력이 얼마나 공급/소비되고 있는지를 나타냄

7) Transient distortion은 시스템이 신호를 따라잡을 만큼 빨리 반응하지 못할 때 발생

- 그림 13.29: 그래픽적으로 인식할 수 있는 phase distortion 보여줌
 - x축은 시간(0~5ms)
 - y축은 time frequency distribution(-6.25~6.25KHz)
 - 값은 phase inverted image

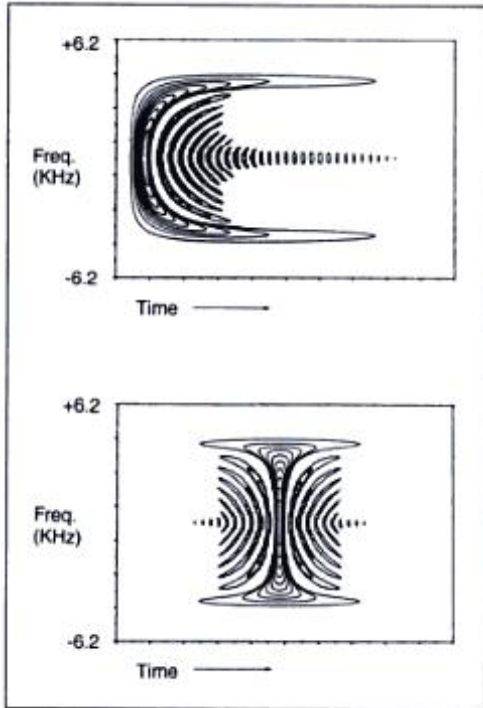


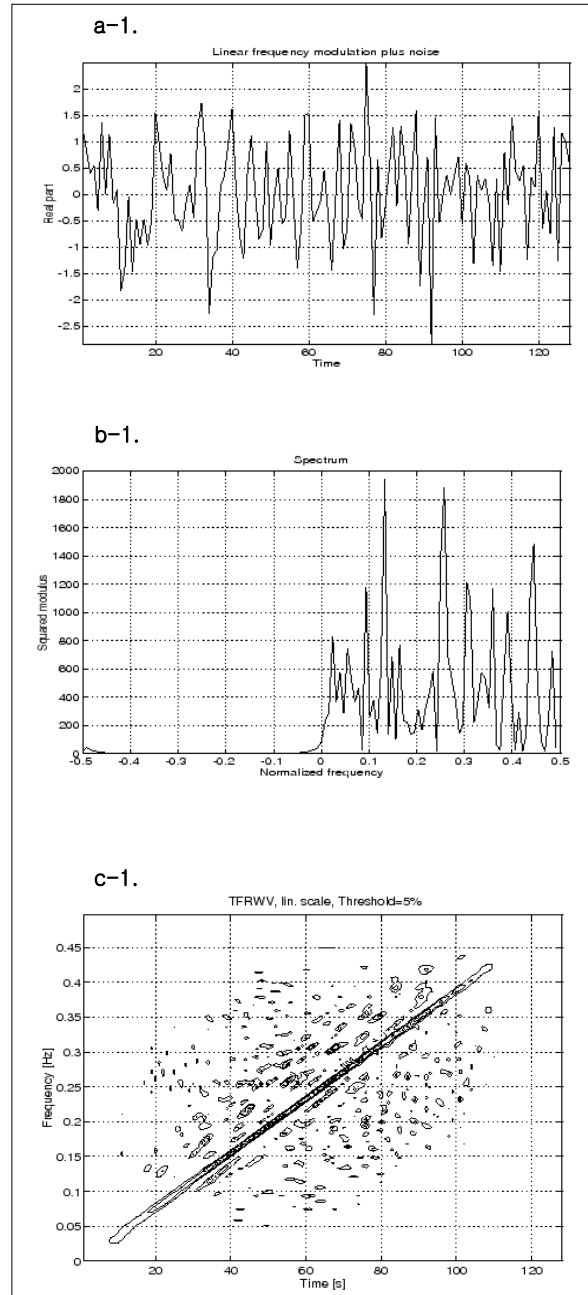
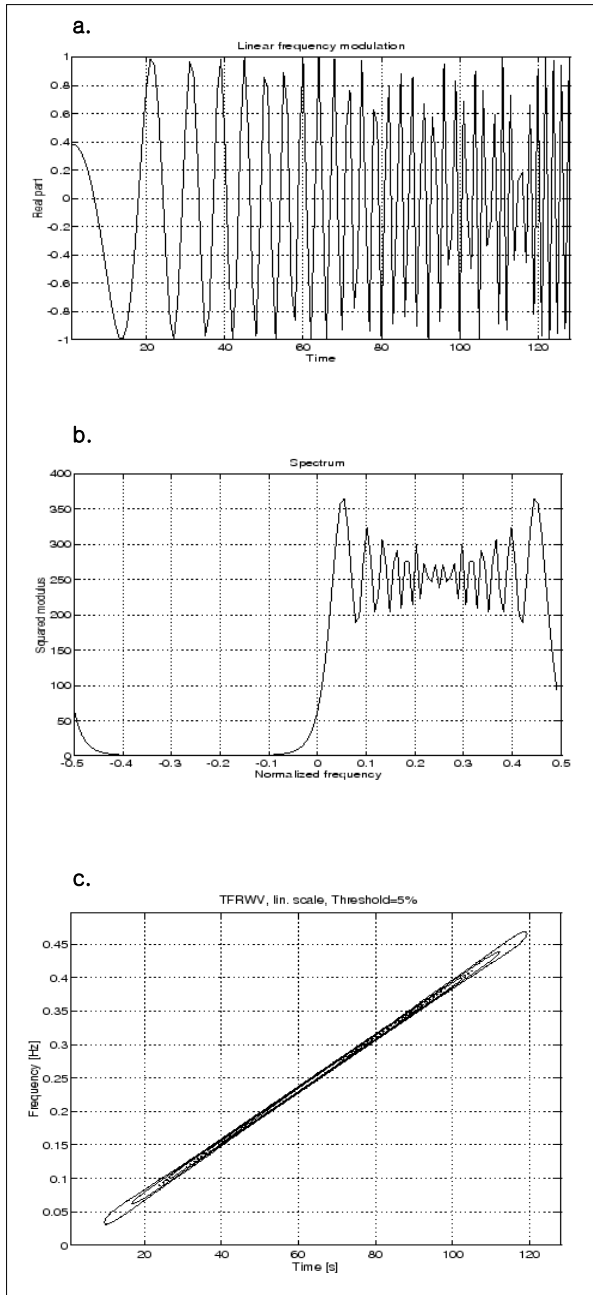
Figure 13.29 Comparison of Wigner distribution plots for two lowpass filters

- x축을 따라 특정 frequency를 늘리면 명확하게 group delay에 의한 주파수 효과 나타남
- 장점: TFR(time-frequency representation)에서 high spectral and temporal resolutions
- 단점: 신호가 여러 성분으로 이루어진 경우 부가적 cross-term(혹은 cross-talk) 발생
 - (∵ Wigner Distribution이 이중 선형 변환(bilinear transform)이기 때문에 time-frequency 평면상에 음의 값 야기.
 - cross-term을 제거 또는 감소하는 방법들 연구 중이며 그 중 하나가 smoothing
- 이중 선형변환(bilinear transform)이기 때문에 여러 성분이 결합되는 신호의 경우 cross-term 발생 → 음의 값 야기 → 시간과 주파수 평면에서의 파워 분포라는 기본 정의에 위배
- smoothing: 해결 방법의 하나
 - Wigner 함수와 Smoothing window 함수의 시간과 주파수 양 방향으로의 2차원 convolution을 통해 달성
 - 혼신성분은 감소되나 시간 주파수 분석의 해상도 떨어지게 됨
 - time-frequency representation에의 window function 도입
 - ① Martin과 Flandrin의 pseudo Wigner-Ville distribution:cross-term의 감소. 시간을 따라 이동하는 작은 window function을 적용하여 짧은 구간 내에 WVD함수를 반복적으로 계산
 - ② Janssen과 Claasen의 Gaussian window: 항상 양의 값을 갖도록
 - ③ Choi와 Williams의 autocorrelation function과 ambiguity function

Example

- Time-domain, Frequency domain, and Time-frequency representation의 분석 비교

<http://gdr-isis.org/tftb/tutorial/node7.html>

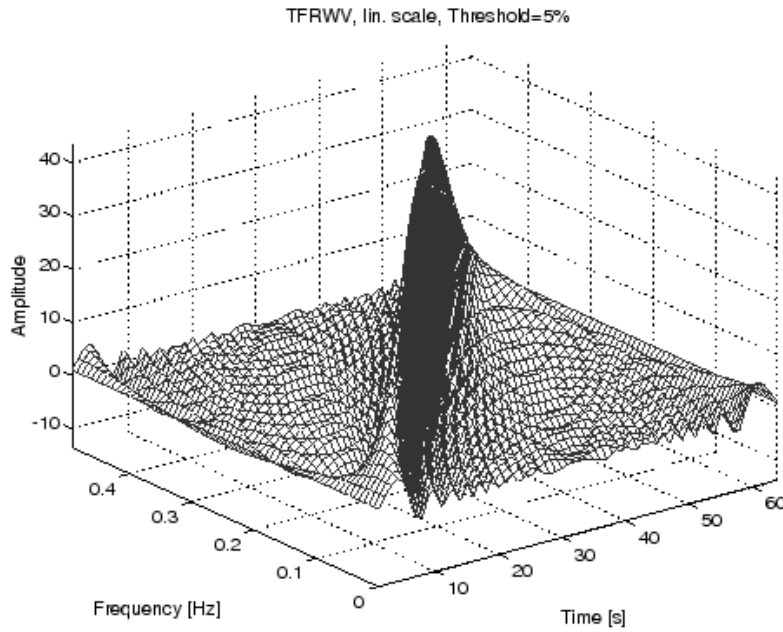


일정한 amp에 선적으로 frequency modulation하는 신호 (non-stationary signal)의 분석

- a.는 time domain
- b.는 frequency domain
- c.는 time-frequency representation(WVD)

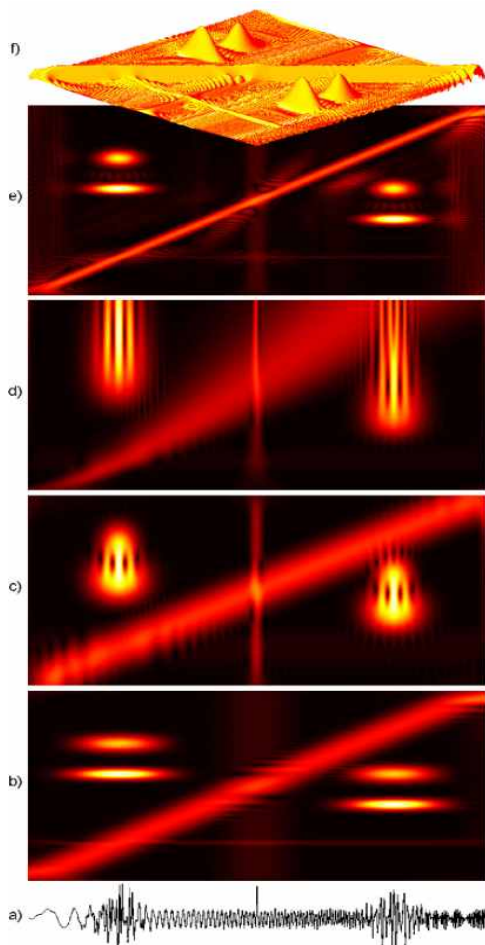
일정한 amp에 선적으로 frequency modulation하는 신호 + Gaussian noise

- a.는 time domain
- b.는 frequency domain
- c.는 time-frequency representation(WVD)



일정한 amp에 선적으로 frequency modulation하는 신호의 Wigner-Ville distribution

<http://www.biomedical-engineering-online.com/content/2/1/1/figure/F8?highres=y>



(f) the same as (e) in 3 dimensions.

(e) smoothed pseudo Wigner-Ville distribution

(d) scalogram(continuous wavelet transform)

(b) and (c) spectrograms
(i.e. windowed or STFT)

(b) = long(125 points) windows
(c) = short(21 points) windows

(a) time-domain



참고문헌 및 사이트

Curtis Roads. *The Computer Music Tutorial*, pp. 590~592

박연규, 김양한. 『위그너-빌 분포함수 계산시 창함수의 적용에 의한 바이어스 오차』, 한국소음진동공학회 1995년도 추계 학술대회논문집 pp. 80-85

Daniele Paolo Scarpazza. "A Brief Introduction to the Wigner Distribution", August 2003

Modris Greitans. "On Discrete Wigner-Ville distribution in nonuniform sampling case", Institute of Electronics and Computer Science, Latvia

<http://en.wikipedia.org/>

<http://gdr-isis.org/tftb/tutorial/node7.html>

<http://www.biomedical-engineering-online.com/content/2/1/1/figure/F8?highres=y>

작성자

조원주 (박사과정, 4기)